

TP2 : Introduction aux Chaînes de Markov

Li-Thiao-Té Sébastien

1 Chaînes de Markov génériques

Introduction On souhaite simuler une chaîne de Markov dans un espace comportant un petit nombre d'états numérotés dans $[1, n]$. La chaîne de Markov est alors entièrement déterminée par la donnée d'une matrice stochastique \mathbf{m} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les lignes ont pour somme 1.

Simuler une va discrète Écrire une fonction `rproba(p)` qui tire un échantillon suivant la loi p portée par $[1, n]$. Il s'agit de réimplémenter la partie 2.1 du premier TP. Vérifier en traçant un histogramme.

Matrice stochastique aléatoire Écrire une fonction `rmarkovmat` qui tire une matrice aléatoire et qui en déduit une matrice stochastique. On vérifiera que la fonction est correcte en prenant quelques exemples.

Simuler une chaîne de Markov On se restreint aux chaînes de Markov d'ordre 1. Écrire une fonction `rmarkov(m,n)` qui simule une trajectoire de longueur n de la chaîne de Markov définie par \mathbf{m} par récurrence :

- la chaîne part de 1
- u_{n+1} est le résultat d'un tirage aléatoire selon la loi donnée par la ligne d'indice u_n

Tirer une matrice stochastique aléatoire de taille 3×3 et afficher une trajectoire de la chaîne de Markov associée.

Convergence vers la loi invariante Étant donné une (grande) trajectoire, visualiser sur une même figure la convergence des fréquences empiriques (utiliser `cumsum`). Calculer la loi invariante à l'aide de la fonction `eig` de Matlab. Comparer avec le graphique.

Calcul d'intégrales Écrire une fonction `rmarkov(m,n,f)` qui calcule l'intégrale par rapport à une trajectoire de longueur n . Définissez une fonction `f` inline (sinus par exemple) et calculez $\mathbb{E}[f]$ sous la loi invariante. Comparez avec `rmarkov(m,n,f)`.
Question : est-ce que simuler une seule trajectoire est suffisant ou bien faudrait-il simuler plusieurs trajectoires ?

2 Ruine du joueur

Introduction Un joueur entre un jeu de pile ou face (loi de Bernouilli de paramètre p) avec une fortune $i \in \mathbb{N}$. S'il obtient pile, sa fortune s'accroît d'une unité et il perd une unité si il obtient face.

Modéliser cette situation sous la forme d'une chaîne de Markov à valeur dans \mathbb{N} .

2.1 Deux bornes absorbantes

Matrice stochastique On suppose que la partie se termine lorsque le joueur est ruiné (fortune nulle) ou bien lorsque le joueur a atteint une fortune a décidée à l'avance. Écrivez une fonction `ruine_mat(p, a)` qui rend une matrice stochastique permettant de simuler le jeu avec la fonction `rmarkov(m, n)`.

Probabilité de ruine Soit f_i la probabilité que le joueur soit ruiné à la fin du jeu en partant de la fortune i . Écrire une relation de récurrence entre f_i , f_{i+1} et f_{i-1} et en déduire f_i . Calculer de même le gain moyen du joueur à la fin de la partie et le temps moyen de jeu.

Simulations Vérifier les résultats précédents à l'aide d'une méthode de Monte Carlo.

2.2 Jouer contre la banque

On suppose que le joueur ne s'arrête que quand il est ruiné, ou qu'il joue contre un organisme émetteur de monnaie. Distinguer qualitativement les deux cas possibles.

Implémentation On ne peut pas se servir de la fonction `rmarkov(m, n)` car le joueur peut avoir des encours arbitrairement grands. Implémenter une fonction `ruine` qui simule une trajectoire de la chaîne de Markov. On utilisera une variable locale pour stocker la fortune courante du joueur.

Simulations Calculer la probabilité de ruine et le temps moyen de jeu, et vérifier ces résultats à l'aide de simulations. Pour illustrer ce qui se passe, superposez quelques trajectoires (correspondant à la même valeur de p) sur une même figure.