**Chaînes de Markov : modélisation et contrôle des stocks.**

François-Xavier Vialard

**Introduction :** Dans le cadre de la modélisation de la gestion des stocks, on étudie le modèle à une période de temps, brique élémentaire pour étudier le modèle dynamique, et aborder le contrôle des chaînes de Markov. On s'intéresse au problème du gestionnaire de stock d'un seul type d'article rattaché à un commerce, le gestionnaire doit maximiser une fonction de gain : les actions stocker, passer commande et ne pas satisfaire la demande du client ont chacune un coût, les recettes proviennent de la vente d'articles.

# 1 Modèle à une période de temps

Le gestionnaire du stock fait face à trois type de coût :
- Coût (unitaire) de stockage pour les invendus : $C_s$.
- Coût de passation de commande : (indépendant du volume, imputable à des coûts administratifs) : $C_f$.
- Coût unitaire d'approvisionnement : $C_c$.
- Coût unitaire de rupture de stock si la demande de clients ne peut être satisfaite : $C_r$.

Le gestionnaire ne connaît pas la demande à l'avance, il est donc naturel de la représenter par une variable aléatoire entière ou réelle, notée $D$. On suppose que l'espérance de la demande est finie. De plus, on suppose que si la demande n'est pas servie immédiatement, la demande ne se cumule pas d'une période à l'autre. (Par exemple, le client va se fournir ailleurs.)

**Question 1:** On suppose que le gestionnaire du stock constate un stock initial $S_0$ avant le début de période et qu'il peut commander une quantité $\Delta$ variable de produits. A l'issue de la periode de vente, le gestionnaire constate son stock et son nombre de ventes manquées, et calcule son coût en fonction de ces quantités.

1. Quel est le coût exprimé en fonction des données pour le gestionnaire ?
2. Quelle est la stratégie optimale (optimisation de la quantité commandée) du gestionnaire du stock ? (On exprimera sa stratégie en fonction de la fonction de répartition $F$ de la demande et des données.)

**Remarque 1** *Le coût de stockage peut être négatif. Expliquer pourquoi l'hypothèse $C_r \leq C_c$ semble absurde du point de vue de la modélisation, et qu'en est-il pour le résultat analytique.*

**Question 2:**

1. Comment modéliser la loi de la demande $D$ ? (on considèrera la population des acheteurs comme un grand nombre d'intervenants indépendants.)
2. Simuler ces lois à partir de la fonction *rand* sous matlab. Implémenter une simulation de la loi de Poisson après avoir montré que :

$$Y = \min\{n \geq 0 | \prod_{i=0}^{n} X_i \leq \exp(-\lambda)\},$$

suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ si les variables $X_i$ sont uniformes sur $[0,1]$.

3. Application numérique : Dans le cas où la demande est modélisée par une loi de poisson de paramètre $\lambda = 50$, que doit faire le gestionnaire si $S_0 = 30$, $C_s = 0.05$, $C_c = 0.05$, $C_r = 0.2$, $C_f = 0.5$ ? A partir de quel niveau de stock le gestionnaire a-t-il intérêt de commander ?

# 2 Modèle à $N$ périodes de temps

On suppose maintenant que le gestionnaire a la possibilité de commander ou non une quantité $Q_c$ qui est fixée par le distributeur. Chaque mois, la demande est une réalisation de $D$ indépendante de l'ensemble des réalisations des mois précédents. Cette livraison a un coût fixe $C_c$. On va répondre dans la suite à la question : quelle est la stratégie optimale du gestionnaire, sachant qu'il part d'un stock initial $q_0$ ? on note $\rho$ le facteur d'actualisation du numéraire : ie 1 euro à l'instant $n$ vaut $\rho^n$ à l'instant initial.

Notons $q_t$ la quantité "virtuelle" (cette quantité peut être négative si la demande est forte) de produit en stock à l'instant $t$. Le stock "réel" à l'instant $t$ est la partie positive de $q_t$. On a l'équation suivante :

$$q_{t+1} = (q_t)_+ + decision(t)\lambda - D_{t+1},$$

avec $decision(t)$ est 1 si le gestionnnaire se fait livrer et 0 s'il refuse la livraison. Cette décision se prend en fonction des évènements antérieurs à $t$ et à l'instant $t$. Le gestionnaire n'a pas d'information sur l'avenir à l'instant $t$.

**Question 3:** Implémentation de stratégies simples :

1. Vérifier que le coût total moyen pour le gestionnaire sur $N$ périodes de temps s'écrit :

$$\mathbb{E}[\sum_{t=0}^{N-1} \rho^t (c_r q_{t+1}^- + c_s q_{t+1}^+ + decision(t) C_c)].$$

2. On considère une variable $V$ de loi de Poisson de paramètre $\lambda$ que l'on "tronque" à $2\lambda$, on pose $D = V \wedge 2\lambda$. La demande $D$ est alors à support fini. Le gestionnaire choisit la stratégie suivante : passage de commande lorsque le stock passe sous une barrière $q_{min}$.

   Se donner une valeur de $q_{min}$ et étudier cette chaîne de Markov (irréductibilité et récurrence) dont les états sont les niveaux de stock. Estimer par une méthode de Monte-Carlo la probabilité invariante. (On peut la retrouver en utilisant une fonction déterminant le vecteur propre associée à la matrice de transition. (Pour Matlab : eig).)

3. On suppose $\rho = 1$ et $N = 10$. Proposer une méthode pour optimiser le paramètre $q_{min}$. Pour une loi de Poisson tronquée à $2\lambda = 100$, et les paramètres $S_0 = 30$, $Q_c = 52$, $C_s = 0.05$, $C_r = 0.2$, $C_c = 1$, donner le $q_{min}$ optimal.

**Stratégie optimale et contrôle de la chaîne de Markov**

On appelle stratégie du gestionnaire toute suite de décision (commande ou non) qui dépend uniquement des états antérieurs du système ; naturellement une stratégie optimale pour le gestionnaire est une stratégie qui minimise le coût de la question 3.

**Question 4:**

1. A l'aide de la question 1 et en observant que la décision optimale à l'étape $n$ ne dépend que de l'état $n-1$, montrer que la stratégie optimale existe et est Markovienne au sens où elle ne dépend pas des états strictement antérieurs à la décision. Donner une formule de récurrence qui permet de calculer l'espérance du coût.
2. Implémenter un calcul de la stratégie optimale et commenter les résultats pour les valeurs numériques précédentes.

# Références

[1] Jean-François Delmas : *"Modèles aléatoires pour l'ingénieur"*, cours de 2ème et 3ème année de l'ENPC.