

Option Probabilités et Statistiques
Autour de la simulation de variables aléatoires

Exercice 1 Comment peut-on simuler une $\mathcal{B}(p)$ pour un $p \in [0, 1]$ quelconque en lançant une pièce de monnaie (...et en étant économe sur le nombre de lancers).

Exercice 2 Proposer un algorithme de rejet permettant de simuler une variable aléatoire gaussienne à partir de la loi double exponentielle de densité $(\lambda/2) \exp(-\lambda|x|)$.

Exercice 3 Justifier la méthode de simulation d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ par la méthode de Box et Muller puis par la méthode polaire (cf cours).

Exercice 4 [Simulation d'une densité portée par une surface] *Cet exercice et le suivant regardent le problème important et moins classique de la simulation de variables aléatoires à valeurs dans des surfaces.*

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C_b^1 .

1. On note $S = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ la surface dans \mathbb{R}^3 définie par le graphe de f . On note μ_S la loi uniforme sur S . Comment simuler une variable aléatoire X de loi μ_S ?
2. Sur D le disque unité et $f(x) = \sin(|5x|)/|5x|$. Mettre en œuvre la méthode dans ce cas.

Exercice 5 [Surface étoilée] Soit S^{d-1} la sphère unité de \mathbb{R}^d .

1. Trouver au moins une façon de simuler une loi uniforme sur la sphère sur S^d .
2. Soit $\rho : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^1 . On considère la surface $S = \{\rho(u)u \mid u \in S^{d-1}\}$. Donner une façon de simuler une loi uniforme sur S .

% beginex[Simulation d'événement rare]

Exercice 6 [variable de contrôle (d'après [Par07])] La méthode de la variable de contrôle est une méthode très simple de réduction de la variance. On décompose $E(g(X)) = E((g(X) - f(X)) + E(f(X)))$ où $E(f(X))$ est directement calculable par une formule analytique et $(g(X) - f(X))$ est de variance plus petite que $g(X)$.

1. Proposer une méthode d'échantillonnage préférentiel pour le calcul de $I = E(\mathbb{1}_{X>0} \exp(\beta X))$, où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\beta = 5$.
2. Proposer une méthode de variable de contrôle pour le même calcul.

Références

[Par07] E. Pardoux. *Processus de Markov et applications, Algorithmes, réseaux, finances*. Dunod, 2007.