ENS CACHAN **ÉPREUVE de MODÉLISATION**
2007-2008

Option Probabilités et Statistiques
Théorème d'arrêt, ruine du joueur et processus de Galton-Watson

Exercice 1 (Théorème d'arrêt pour les t.a. bornés) Dans les notes nous avons donné une version en espérance du théorème d'arrêt pour les temps d'arrêts bornés. Nous donnons ici une version conditionnelle :

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale intégrable et S et T deux t.a. bornés (i.e. il existe $M > 0$ tel que $P(S \leq M) = P(T \leq M) = 1$).

1. Montrer que $X_S \leq E(X_K|\mathcal{F}_S)$.
2. En considérant la sous-martingale arrêtée X^T, en déduire que $X_{S\wedge T} \leq E(X_T|\mathcal{F}_S)$.
3. Montrer que $E(X_S \mathbb{1}_{S\leq T}) \leq E(X_T \mathbb{1}_{S\leq T})$ et que
$$E(X_{S\wedge T}) \leq E(X_T)$$
4. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale alors
$$X_{S\wedge T} = E(X_T|\mathcal{F}_S)\,.$$

Exercice 2 (Ruine du joueur) On considère $(\xi_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telle que $P(\xi = 1) = p$ et $P(\xi = -1) = q$ avec $p = 1 - q$ et $p \in]0, 1[$. On modélise l'évolution de la fortune d'un joueur jouant 1 euro à chaque partie et partant d'une fortune initiale $a \in \mathbb{N}^*$ par $F_n = a + \sum_{i=1}^n \xi_i$. On suppose que le joueur s'arrête de joueur lorsqu'il a atteint la somme $b \in \mathbb{N}$ ($b \geq a$) ou lorsqu'il est ruiné (ie $F_n = 0$). On note $\tau = \inf\{n \geq 0 \mid F_n = b\}$.

1. Vérifier que $n \to M_n \doteq F_n - n(p - q)$ est une martingale pour une filtration que l'on précisera.
2. Utiliser le théorème de convergence presque sûre des sous-martingales sur la martingale pour déduire lorsque $p \neq q$ que $E(\tau) < \infty$ puis la valeur de $E(\tau)$ en fonction de la probabilité de ruine.
3. Vérifier que $X_n = (\frac{q}{p})^{F_n}$ est une martingale positive. En déduire la valeur de $E((\frac{q}{p})^{F_\tau})$ puis lorsque $p \neq q$ celle de la probabilité de ruine et enfin la valeur de $E(\tau)$ (rep : $P(F_\tau = b) = \frac{1-(q/p)^b}{1-(q/p)^a}$ et $E(\tau) = (P(F_\tau = b)b - a)/(p - q)$).
4. Dans le cas $p = 1/2$, utiliser M^τ pour calculer la probabilité de ruine, puis la martingale $n \to F_n^2 - n$ arrêtée en τ pour calculer $E(\tau)$ (rep : $P(F_\tau = b) = a/b$ et $E(\tau) = a(b - a)$).

Exercice 3 (Processus de Galton-Watson) Le processus de Galton-Watson est un des modèles les plus simples de dynamique des populations introduit à la fin du 19ième siècle par Galton et Watson (cf H W Watson and Francis Galton, "On the Probability of the Extinction of Families", Journal of the Anthropological Institute of Great Britain, volume 4, pages 138-144, 1875.) pour étudier la disparition des noms de familles aristocratiques en Angleterre (problématique malheureusement assez à la mode à l'époque !)

Pour suivre la trace des noms de familles, on ne considère ici que la population Z_n des garçons en fonction de la génération n. On pose $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n}$ pour tout $n \geq 0$ (on a donc $Z_{n+1} = 0$ si $Z_n = 0$) où $(\xi_{i,n})$ est une suite i.i.d. de loi μ sur $\mathbb{N}$. On suppose que $P(\xi = 0) > 0$ et $E(\xi) < \infty$.

1. Vérifier que Z_n est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ pour laquelle 0 est absorbant et tous les états sont transients. En déduire que $P(\lim Z_n \in \{0, +\infty\}) = 1$.
2. On note pour $s \in [0,1]$, $G(s) \doteq E(s_1^Z)$. Montrer que G est convexe et que G admet une dérivée à gauche $G'(1)$ en 1 qui vaut $m = E(\xi)$.
3. Vérifier que $G_{n+1}(s) \doteq E(s^{Z_{n+1}}) = G(E(s^{Z_n}))$ puis que $G_n(0) = P(Z_n = 0)$.
4. On note $q \doteq P(\exists n \geq 1, Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction. Montrer que $q = G(q)$ puis que si $m > 1$ il existe une unique solution à l'équation $G(s) = s$ dans $[0,1[$ et ceci pour $s = q$.
5. Montrer que si $m \leq 1$ alors $q = 1$.
6. On suppose que $m > 1$.
   (a) Montrer que $n \to M_n \doteq Z_n/m^n$ définie une martingale positive pour une filtration adéquate qui converge pas vers une variable aléatoire M_∞.
   (b) Montrer que si $q' = P(M_\infty = 0)$ alors $G(q') = q'$.
   (c) Montrer que si ξ est de carré intégrable alors M_n est une martingale bornée dans L^2. En déduire par le théorème de convergence des martingales L^2 que $E(M_\infty) = E(M_0) = 1$ et donc que $q' < 1$.
   (d) Conclure que s'il n'y a pas extinction, alors il y a explosion exponentielle de la population.
7. Discuter des limites de ce modèle.

Solution (Ex 1)

1. On remarque que pour tout $0 \leq l \leq K$ et tout $A \in \mathcal{F}_S$, on a :

$$\mathsf{E}(X_K \mathbb{1}_{A\cap(S=l)}) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(X_K|\mathcal{F}_l)\mathbb{1}_{A\cap(S=l)}) \geq \mathsf{E}(X_l \mathbb{1}_{A\cap(S=l)})$$

   puisque $A \cap (S = l) \in \mathcal{F}_l$ et $X_l \leq \mathsf{E}(X_K|\mathcal{F}_l)$.
   Par suite, on a $X_S \leq \mathsf{E}(X_K|\mathcal{F}_S)$ en écrivant $\mathbb{1}_A = \sum_{l=1}^{K} \mathbb{1}_{A\cap(S=l)}$.
2. En appliquant le résultat précédent sur la sous-martingale X^T et en remarquant que $X_K^T = X_T$ puis que $X_S^T = X_{S\wedge T}$, on déduit le résultat demandé.
3. De plus, comme $(S \leq T) \in \mathcal{F}_S$ on déduit $\mathsf{E}(X_S \mathbb{1}_{S\leq T}) \leq \mathsf{E}(X_T \mathbb{1}_{S\leq T})$ puis le dernier résultat en prenant l'espérance.
4. Considérer les deux sous-martingales X et $-X$.