DU NOUVEAU
SUR L'ECHANTILLONNAGE

OU COMMENT TRICHER AVEC SHANNON

Yves Meyer

9 avril 2009

1. Ce que tous les enfants savent.

On suppose qu'un signal $f(t)$ ne contienne pas de fréquences dépassant ω. Cette fréquence ω est appelée la fréquence de coupure.

Alors il suffit d'échantillonner $f(t)$ sur une grille $h\mathbb{Z}$, $0 < h \leq \pi/\omega$, pour reconstruire f de façon exacte à partir des $f(hj)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Si $0 < h < \pi/\omega$, on a suréchantillonné (on a fait trop de mesures). Le cas $h = \pi/\omega$ est celui de l'échantillonnage critique de Shannon.

Si $h > \pi/\omega$, le sous-échantillonnage introduit un artefact appelé “aliasing”.

Un exemple d'aliasing est fourni par certains westerns où, lors d'une poursuite par les Indiens, les roues de la diligence semblent tourner lentement en sens contraire. La cadence d'échantillonnage est de 24 images par seconde ; elle est insuffisante parce que les roues tournent trop vite.

Que fait-on si les fréquences ξ contenues dans f vérifient $0 < \omega_0 \leq |\xi| \leq \omega_1$? Le théorème de Shannon ne permet pas de prendre en compte ω_0 et nous impose la même cadence d'échantillonnage que si l'on avait $|\xi| \leq \omega_1$.

2. Echantillonnage stable

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix \cdot \xi) f(x)\, dx$$

Si K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, nous écrirons $f \in E_K$ si la transformée de Fourier $\hat{f}$ de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est nulle hors de K.

Nous étudierons l'échantillonnage irrégulier sur un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ de points vérifiant

$$|\lambda - \lambda'| \geq \beta > 0,\ \ \lambda \in \Lambda,\ \lambda' \in \Lambda,\ \lambda \neq \lambda' \qquad (1)$$

Définition 1. *Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble d'échantillonnage stable pour E_K s'il existe une constante C telle que, pour tout $f \in E_K$ on ait*

$$\|f\|_2^2 \leq C \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \qquad (2)$$

Si cette propriété a lieu, il existe une famille ϕ_λ, $\lambda \in \Lambda$, de fonctions appartenant à E_K telles que, pour toute fonction $f \in E_K$, on ait

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) \phi_\lambda(x) \qquad (3)$$

3. H.J. Landau

La suite $f(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, est de carré sommable et la série (3) converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Attention! Les fonctions ϕ_λ dépendent de Λ et de K.

Après avoir énoncé la condition nécessaire due à H.J. Landau (Bell Labs, Murray Hill) pour avoir (2), nous étudierons trois problèmes, notés (A), (B) et (C).

La condition nécessaire suivante a été découverte par H.J. Landau.

Théorème 3.1. *Si Λ est un ensemble d'échantillonnage stable pour E_K, alors on a nécessairement*

$$\underline{\text{dens}}\ \Lambda \geq (2\pi)^{-n}|K| \tag{4}$$

Cette condition nécessaire portant sur la densité inférieure de Λ n'est évidemmment pas suffisante. Pour calculer la densité inférieure on procède comme suit. Si $B(x, R)$ est la boule de centre x et de rayon R, on compte le nombre de points de $B(x, R) \cap \Lambda$ et l'on en prend la borne inférieure $N(R)$ en $x \in \mathbb{R}^n$. On divise $N(R)$ par le volume de $B(x, R)$ et l'on prend la borne inférieure de ce quotient quand R tend vers l'infini.

4. Le pavage hexagonal sera battu

Lorsque A est une matrice inversible $n \times n$ et que $\Lambda = \Gamma = A(\mathbb{Z}^n)$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que Λ soit un ensemble d'échantillonnage stable pour E_K est que pour tout $y \neq 0$ appartenant au réseau dual Γ^* de Γ on ait $|K \cap (K+y)| = 0$. Le réseau dual de Γ est défini par $\Gamma^* = \{y;\, \exp(ix \cdot y) = 1,\, x \in \Gamma\}$.

Cette condition est beaucoup plus forte que celle portant sur la densité de Λ.

Si K est donné, on cherchera un ensemble d'échantillonnage stable Λ ayant une densité minimale (ce qui revient à faire le moins possible de mesures). Ce problème devient alors celui des pavages les plus denses possible du plan ou de l'espace par des translatés de K. Si par exemple $n = 2$ et si K est un disque de centre 0 et de rayon R, alors l'échantillonnage optimal sur un réseau des fonctions de E_K est fourni par le réseau hexagonal. La densité du réseau optimal est $\frac{\sqrt{3}}{2\pi^2}R^2$. Nous verrons que l'on peut descendre jusqu'à $\frac{1}{4\pi}R^2$.

Si maintenant K est la couronne $1 - \varepsilon \leq |x| \leq 1$, alors l'échantillonnage optimal sur un réseau des fonctions $f \in E_K$ est fourni par le réseau hexagonal de densité $\frac{\sqrt{3}}{2\pi^2}$ alors que l'on peut, grâce à un *échantillonnage irrégulier*, descendre jusqu'à $\varepsilon/2\pi$ comme nous le montrerons (théorème 6.1).

5. Trois problèmes

Voici les trois problèmes que nous étudierons dans le cadre de l'échantillonnage irrégulier.

Problème A. *Le compact $K \subset \mathbb{R}^n$ est donné* et l'on cherche à échantillonner de la façon la plus économique possible les fonctions $f \in E_K$. Il s'agit donc de faire le moins possible de mesures pour récupérer f. En d'autres termes, on veut que la densité d'échantillonnage soit minimale. La densité minimale est $(2\pi)^{-n}|K|$.

Problème B. *L'ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est donné* et l'on cherche à savoir si Λ peut être utilisé pour échantillonner toutes fonctions de tous les espaces E_K sous la seule condition que la mesure du compact K soit inférieure à $(2\pi)^n \operatorname{dens} \Lambda$.

Problème C. *L'ensemble Λ est donné* tandis que K et $f \in E_K$ sont inconnus. On sait seulement que la mesure de K est inférieure à $\frac{1}{2}(2\pi)^n \operatorname{dens} \Lambda$ et l'on veut retrouver f et K à partir des données $a(\lambda) = f(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Cela revient à recontruire une fonction f, portée par un ensemble inconnu mais de petite mesure, à l'aide de quelques-uns de ses coefficients de Fourier.

Nous verrons que ces trois problèmes admettent des solutions différentes.

6. Solution du premier problème.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème 6.1. *Pour tout compact* $K \subset \mathbb{R}^n$ *et tout* ε *positif, il existe un réseau* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *et un ensemble fini* $F \subset \mathbb{R}^n$ *tels que l'ensemble* $\Lambda = \Gamma + F$ *ait les deux propriétés suivantes: (a) la densité de* Λ *est inférieure à* $(2\pi)^{-n}|K| + \varepsilon$ *et (b)* Λ *est un ensemble d'échantillonnage stable pour* E_K.

En dimension 1 la construction de Λ repose sur une variante simple d'un théorème dû à Terence Tao. Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments. La transformée de Fourier d'une fonction f définie sur $\mathbb{F}_p$ est

$$\hat{f}(l) = \sum_{0 \le k \le p-1} \exp(2\pi i k l / p) f(k) \tag{5}$$

Si $E \subset \mathbb{F}_p$, nous désignerons par l^2_E l'espace vectoriel des $f \in l^2(\mathbb{F}_p)$ qui sont nulles hors de E et par $l^2(E)$ l'espace des restrictions à E des $f \in l^2(\mathbb{F}_p)$. Alors le théorème de Tao nous dit que, pour deux parties E et F de $\mathbb{F}_p$ ayant le même nombre d'éléments, l'application $T : l^2_E \mapsto l^2(F)$ définie par $T(f) = \hat{f}|_F$ est un isomorphisme.

6.1. **Une variante simple du théorème de Tao.** Observons que cet énoncé est immédiatement faux si $\mathbb{F}_p$ est remplacé par $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et si N n'est pas un nombre premier. Il existe cependant des versions faibles du théorème de Tao où $\mathbb{F}_p$ est remplacé par $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et où le choix de l'ensemble F dépend de celui de E. Voici la version que nous utiliserons.

Lemme 6.1. *Si $E \subset \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, désignons par q le nombre d'éléments de E et posons $F = \{0, 1, \cdots, q-1\}$. Alors il existe une constante $\beta = \beta_{q,N} > 0$ telle que, pour toute suite $c(k)$, $k \in E$, on ait*

$$\sum_{m=0}^{q-1} |\sum_{k\in E} c(k)\exp(2\pi ikm/N)|^2 \geq \beta \sum_{k\in E} |c(k)|^2 \qquad (6)$$

La preuve du lemme 6.1 se ramène au calcul du déterminant de la matrice $A = ((\exp(2\pi ikm/N)))_{k\in E,\, 0\leq m\leq q-1}$. C'est un déterminant de van der Monde qui est non nul.

Revenons à la preuve du théorème 6.1. Nous pouvons supposer $K \subset [0, 2\pi]$ et ensuite remplacer K par $K' \supset K$ de sorte que K' soit une réunion de q intervalles et vérifie $|K'| \leq |K| + \varepsilon$. Si l'entier N est suffisamment grand, nous pouvons même supposer que les extrémités des q intervalles composant K' soient de la forme $2\pi\frac{k}{N}$, $0 \leq k \leq N$. On a donc $|K'| = 2\pi\frac{q}{N}$ et l'on écrira désormais K au lieu de K'.

Tout se ramène à prouver ce qui suit.

6.2. **Une base de Riesz de $\mathbf{E}_K$.**

Proposition 6.1. *Soit $E \subset \{0, \cdots, N-1\}$, $q = \mathrm{Card}\, E$ et soit $K \subset [0, 2\pi]$ la réunion des q intervalles $[2k\pi/N, 2(k+1)\pi/N]$, $k \in E$. On pose alors*

$$\Lambda = N\mathbb{Z} + \{0, \ldots, q-1\} \tag{7}$$

Soit $\phi(x)$ la transformée de Fourier inverse de la fonction indicatrice de K. Les $\phi(x - \lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, forment alors une base de Riesz de E_K.

Corollaire 6.1. *Avec les notations de la Proposition 6.1, Λ est un ensemble d'échantillonnage stable pour E_K.*

Démontrons le corollaire. La transformée de Fourier d'une fonction $f \in E_K$ s'écrit

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in E} \hat{f}_k(N\xi - 2k\pi) \tag{8}$$

où chaque $\hat{f}_k$ est portée par $[0, 2\pi]$. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k \in E} f_k(x/N) \exp(2\pi i k x/N) \tag{9}$$

Pour démontrer le corollaire, on doit donc montrer que le nombre σ défini par

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{0 \le m \le q-1} |\sum_{k \in E} f_k(l + m/N) \exp(2\pi i k m/N)|^2 \tag{10}$$

dépasse $\beta \|f\|_2^2$.

On commence, pour chaque m fixé, par calculer la somme en $l \in \mathbb{Z}$ en utilisant le lemme suivant.

Lemme 6.2. *Si la transformée de Fourier de g est portée par un intervalle I de longueur 2π, alors la somme*

$$c(\alpha) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |g(l + \alpha)|^2 \tag{11}$$

ne dépend pas de $\alpha \in [0, 1]$ et vaut $\|g\|_2^2$.

Le lemme 6.2 est appliqué à la fonction auxiliaire $g(x) = \sum_{k \in E} f_k(x) \exp(2\pi ikm/N)$ et permet de ramener le calcul de σ à l'expression plus simple suivante

$$\sigma = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \{ \sum_{0 \leq m \leq q-1} | \sum_{k \in E} f_k(l) \exp(2\pi ikm/N)|^2 \} \tag{12}$$

Puisque $|E| = q$, on peut appliquer (pour tout l fixé) le lemme 6.1 à la somme en m et l'on obtient

$$\sigma \geq \beta \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in E} |f_k(l)|^2 = \beta \|f\|_2^2 \tag{13}$$

La preuve du théorème 6.1 en dimension quelconque repose sur une autre variante du théorème de Tao.

Lemme 6.3. *Pour toute partie E de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$, il existe une partie $F \subset (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$ de même cardinalité et telle que la matrice $A = ((\exp(2\pi ik \cdot l/N))_{k \in E, l \in F}$ soit inversible.*

La preuve du lemme 6.3 s'obtient assez facilement par récurrence sur le cardinal q de E et sera détaillée dans l'appendice.

Passons à la preuve du théorème 6.1 en dimension quelconque. On suppose que K est inclus dans $[0, 2\pi]^n$ et l'on recouvre K par les cubes $[2k_j\pi/N \le x_j < 2(k_j + 1)\pi/N]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k \in E$, où N est assez grand pour que la somme des mesures de ces petits cubes ne dépasse pas $|K| + \varepsilon$.

On remplace alors K par cette réunion de cubes, réunion qui sera encore notée K. L'ensemble E est maintenant fixé et on lui associe F par le lemme 6.3. On pose alors

$$\Lambda = N\mathbb{Z}^n + F \tag{14}$$

On décompose ensuite une fonction $f \in E_K$ en une somme

$$f(x) = \frac{1}{N^n} \sum_{k \in E} f_k(x/N) \exp(2\pi i k \cdot x/N) \tag{15}$$

où les transformées de Fourier des fonctions f_k sont portées par le cube $[0, 2\pi]^n$. La suite du calcul s'effectue comme dans le cas de la dimension 1 en utilisant le lemme suivant.

Lemme 6.4. *Si la transformée de Fourier de $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est portée par le cube $[0, 2\pi]^n$, alors la somme*

$$c(\alpha) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} |g(l + \alpha)|^2 \tag{16}$$

ne dépend pas de $\alpha \in [0, 1]^n$ et vaut $\|g\|_2^2$.

7. Universal sampling sets

Dans "A universal sampling of band-limited signals", C.R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006) 927-931, A. Olevskii et A. Ulanovskii ont posé le problème de ne plus faire dépendre l'ensemble Λ du compact K. Il s'agit maintenant de construire une ensemble d'échantillonnage Λ qui convienne chaque fois que la mesure $|K|$ de K vérifie $|K| < (2\pi)^n \mathrm{dens}\,\Lambda$. C'est notre problème B. Le théorème 6.1 ne permet pas de résoudre le problème B. En effet on a

Lemme 7.1. *Soit $\Lambda = \mathbb{Z} + F$ où F est un ensemble fini. Alors pour tout $\alpha > 0$, il existe un compact K de mesure inférieure à α et fonction $f \in E_K$ qui est nulle sur Λ sans être identiquement nulle.*

La preuve est immédiate. Nous construisons la transformée de Fourier de f. On suppose que

$$F = \{x_1, \dots, x_q\}$$

et l'on part de la mesure atomique

$$\sigma = \sigma_1 * \sigma_2 \dots * \sigma_q$$

où $\sigma_j = e^{i\phi_j}\delta_0 - \delta_{2\pi}$. Le choix de la phase $\phi_j = 2\pi x_j$ permet d'avoir $\hat{\sigma}_j(k + x_j) = 0,\ k \in \mathbb{Z}$. Dès lors

$$\hat{\sigma}(\lambda) = 0,\ \lambda \in \Lambda.$$

Il suffit de remplacer σ par $\sigma * g$ où g est continue et supportée par $[-\alpha 2^{-q}, \alpha/2^{-q}]$ pour conclure. Le cas $\Lambda = a\mathbb{Z} + F,\ a > 0$, s'en déduit aussitôt.

7.1. **L'échantillonnage aléatoire.** Richard Bass et Karlheinz Gröchenig ont démontré le résultat remarquable suivant

Théorème 7.1. *Soit* r_j, $j \in \mathbb{Z}$, *des variables aléatoires indépendantes équiréparties sur* $[0,1]$. *Alors presque sûrement l'ensemble aléatoire*

$$\Lambda = \{\lambda_j = j + r_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$$

n'est pas un ensemble d'échantillonnage stable.

Plus précisément, pour tout $\alpha > 0$ on forme $K = [-\alpha, \alpha] \cup [2\pi - \alpha, 2\pi + \alpha]$. Il existe alors une suite f_j de fonctions de E_K telles que l'on ait $\|f_j\|_2 = 1$ tandis que $\sum_{\lambda\in\Lambda} |f_j(\lambda)|^2 \to 0$, $j \to \infty$. Nous montrerons qu'en rempaçant les variables aléatoires r_j par une suite équirépartie, de façon bien plus régulière, dans $[0,1]$ on obtient un ensemble d'échantillonnage stable.

8. Les quasicristaux

Les quasicristaux simples seront définis après l'énoncé du théorème 8.1. Mais voici deux exemples en dimension 1.

On appelle $\{x\} \in [0,1)$ la partie fractionnaire du nombre réel $x = k+\{x\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors le premier exemple est $\Lambda = \{k + \{k\sqrt{2}\}, \ k \in \mathbb{Z}\}$. On notera la forte ressemblance avec l'ensemble aléatoire de Gröchenig. L'équidistribution est rempacée par l'équirépartition. La densité de Λ est alors égale à 1. Le second exemple dépend du paramètre $\alpha > 0$ et est défini par

$$\Lambda = \{\lambda = m + n\sqrt{2}, \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{Z}; \ |m - n\sqrt{2}| \leq \alpha\}.$$

La densité de Λ est $\alpha/\sqrt{2}$. Cette densité peut être choisie aussi faible que l'on souhaite et cependant Λ peut être utilisé pour échantillonner toutes les sommes trigonométriques $f(t) = \sum_1^N c_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$, quelles que soient les fréquences $\omega_1, \cdots, \omega_N$.

Le théorème suivant est démontré dans une note aux CRAS, intitulée "Quasicrystals are sets of stable sampling" et parue en 2008, vol. 346, pp 1235-1238.

Théorème 8.1. *Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ un quasicristal simple. Alors Λ est un ensemble d'échantillonnage stable pour E_K dès que le compact $K \subset \mathbb{R}^n$ vérifie $|K| < (2\pi)^n \mathrm{dens}\, \Lambda$.*

8.1. **Les quasicristaux simples.** Nous définissons maintenant un quasicristal simple.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un réseau. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, écrivons $p_1(x,t) = x$, $p_2(x,t) = t$. Supposons que p_1 restreint à Γ soit une application injective d'image $p_1(\Gamma) = \Gamma_1$. On fait la même hypothèse sur p_2. Supposons de plus que $p_1(\Gamma)$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ et que $p_2(\Gamma)$ est dense dans $\mathbb{R}^m$. Le réseau dual de Γ est noté Γ^* et est défini comme l'ensemble des x tels que $x \cdot y \in 2\pi\mathbb{Z}$, $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma^*$. Si $\gamma = (x,t) \in \Gamma$ nous écrirons $t = \tilde{x}, \tilde{t} = x$. Observons que t est alors déterminé de façon unique par x. La même notation sera utilisée pour les deux coordonnées de $\gamma^* \in \Gamma^*$.

Définition 2. *Soit $Q \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble compact. Alors le quasicristal $\Lambda_Q \subset \mathbb{R}^n$ est défini par*

$$\Lambda_Q = \{p_1(\gamma); \gamma \in \Gamma,\, p_2(\gamma) \in Q\}.$$

Un quasicristal est simple si $m = 1$ et $Q = [-\alpha/2, \alpha/2]$ pour un certain $\alpha > 0$.

9. Le troisième problème

Ceci nous conduit à une solution du troisième problème. Nous montrerons d'abord l'unicité de la solution. Nous fournirons ensuite un algorithme permettant de reconstruire f.

9.1. **Unicité.** Désormais K et f sont inconnus tandis que Λ est donné. On sait cependant que $f \in E_K$ et que

$$|K| < \frac{1}{2}(2\pi)^n \operatorname{dens} \Lambda.$$

Alors f est déterminée de façon unique par son échantillonnage sur Λ. En effet, si f_1 et f_2 coincident sur Λ, on posera $f = f_1 - f_2$ et l'on aura $f = 0$ sur Λ. Mais la transformée de Fourier de f est portée par la réunion $K = K_1 \cup K_2$ dont la mesure ne dépasse pas $|K_1| + |K_2| < (2\pi)^n \operatorname{dens} \Lambda$. Le théorème 8.1 s'applique à K et Λ et permet de conclure. Tout ceci s'écroulerait si l'on rempaçait $|K| < \frac{1}{2}(2\pi)^n \operatorname{dens} \Lambda$ par $|K| < \frac{1}{2}(2\pi)^n \operatorname{dens} \Lambda + \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$.

9.2. **Reconstruire.** Comment reconstruire f sans connaître le support K de sa transformée de Fourier?

C'est ici que l'on s'inspire de compressed sensing d'Emmanuel Candès. On prendra le problème à l'envers et l'on cherchera à *recontruire une fonction f, portée par un ensemble de petite mesure, à l'aide de quelques-uns de ses coefficients de Fourier.*

Soit Λ un quasicristal simple de densité d. Pour tout $\beta > 0$, soit M_β la collection des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dont le support est inclus dans un ensemble compact K (dépendant de f) de mesure ne dépassant pas β.

On a alors

Théorème 9.1. *Si $f \geq 0$ appartient à M_β avec*

$$0 < \beta < (2\pi)^n d/2$$

alors f est déterminée de façon unique par l'échantillonnage $\hat{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, sur Λ de sa transformée de Fourier et f coincide avec la solution unique du problème variationnel suivant

$$\inf\{\|u\|_1\,; u \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}.$$

10. Preuve du lemme 6.4

La preuve s'obtient par récurrence sur le cardinal q de E et F. Si $q = 1$, le résultat est évident et le choix du singleton F est arbitraire. Voyons comment passer de q à $q+1$. On suppose que le nombre d'éléments de E est $q+1$ et l'on choisit dans E un élément noté k_0. On écrit alors $E = \{k_0, k_1, \cdots, k_q\}$. On pose $E' = \{k_1, \cdots, k_q\}$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on peut associer à E' une partie finie F' de même cardinalité q et telle que la matrice $A' = ((\exp(2\pi i k \cdot l/N))_{k\in E', l\in F'}$ soit inversible. On veut construire $F = F' \cup \{x\}$ pour un certain $x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$. On complète A' en une matrice A, de type $(q+1)\times(q+1)$, en lui adjoignant la colonne

$$(\exp(2\pi i x{\cdot}k_1/N), \cdots, \exp(2\pi i x{\cdot}k_1/N), \exp(2\pi i x{\cdot}k_0/N))$$

qui sera la dernière colonne de A. De même les q premiers éléments de la dernière ligne de A seront

$$\exp(2\pi i l \cdot k_0/N),\ l \in F.$$

On suppose, en raisonnant par l'absurde que pour tout choix de x le déterminant de A soit nul. On développe alors ce déterminant par rapport à la dernière colonne de A. On obtient

$$\sum_0^q c_j \exp(2\pi i k_j \cdot x) = 0.$$

Cela implique que tous les coefficients c_j soient nuls. En particulier $c_0 = 0$. Mais c_0 n'est autre que le déterminant de A. On aboutit à une contradiction.