

Les mathématiques embarquées

dans la mission Herschel.

Yves Meyer

Cachan, le 14 janvier 2010

Le télescope spatial Herschel

- (a) Les missions d'Herschel.
- (b) Le compressed sensing embarqué sur Herschel.
- (c) Les noiselets.
- (d) Les paquets d'ondelettes.

Le satellite SPOT5

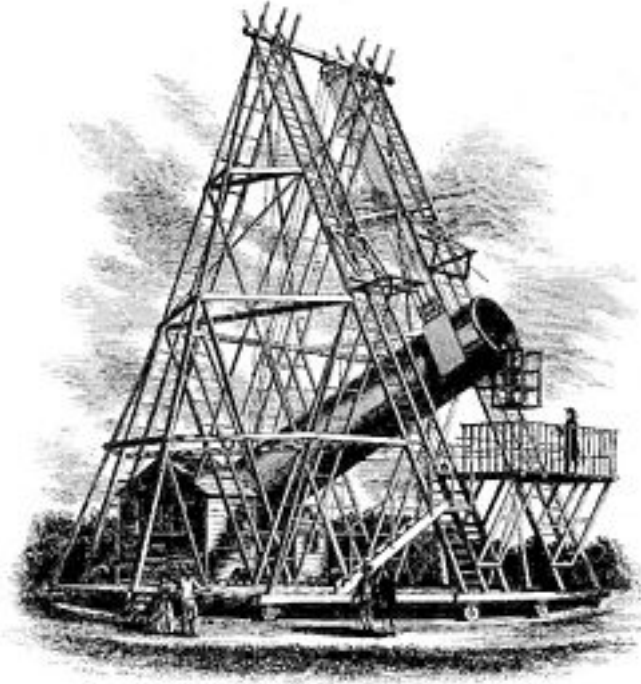
- (a) L'utilisation des paquets d'ondelettes dans les algorithmes de reconstruction au sol des images transmises.

2. WILLIAM HERSCHEL

William Herschel (1738-1822) passe son enfance à Hanovre, une ville du nord-ouest de l'Allemagne qui est sous la protection de la couronne de Grande-Bretagne et de son roi George II. W.Herschel reçoit de son père violoniste et hautboïste une éducation musicale. Garde de régiment, W.Herschel est appelé en Grande-Bretagne en 1756 afin de parer à une invasion française (guerre de Sept Ans). Libéré de ses obligations militaires, W.Herschel gagne sa vie comme copiste musical à Londres, puis directeur de la milice de Durham. En 1758, il obtient la direction des concerts d'Édimbourg avant de devenir organiste à Halifax en 1766, puis à Bath l'année suivante. W. Herschel demeure au centre de la vie musicale de cette ville pendant 10 ans tout en s'intéressant de plus en plus à l'astronomie. Sa musique, assez largement oubliée aujourd'hui, a été redécouverte avec bonheur en 2003 par les London Mozart Players, dans un disque consacré aux symphonies. Les œuvres "galantes" d'Herschel ont été composées entre 1759 et 1770 : 24 symphonies, une douzaine de concertos (violon, alto, hautbois, orgue), des sonates pour clavecin et de la musique religieuse.

En 1776 Herschel construit un télescope et en 1781 il découvre par hasard, au cours d'une observation, la planète Uranus. Aidé par sa sœur Caroline qui l'a rejoint à Bath, il devient un observateur hors pair, construisant lui-même ses lunettes et télescopes. Le Roi George III, passionné d'astronomie, lui offre son soutien, notamment en 1782 avec l'allocation d'un traitement annuel afin qu'il puisse se consacrer entièrement à ses recherches scientifiques.

En 1787 Il montre son télescope de 6 m de focale. En 1789 Il construit un télescope de 12 m de long et de 1,22 m d'ouverture.

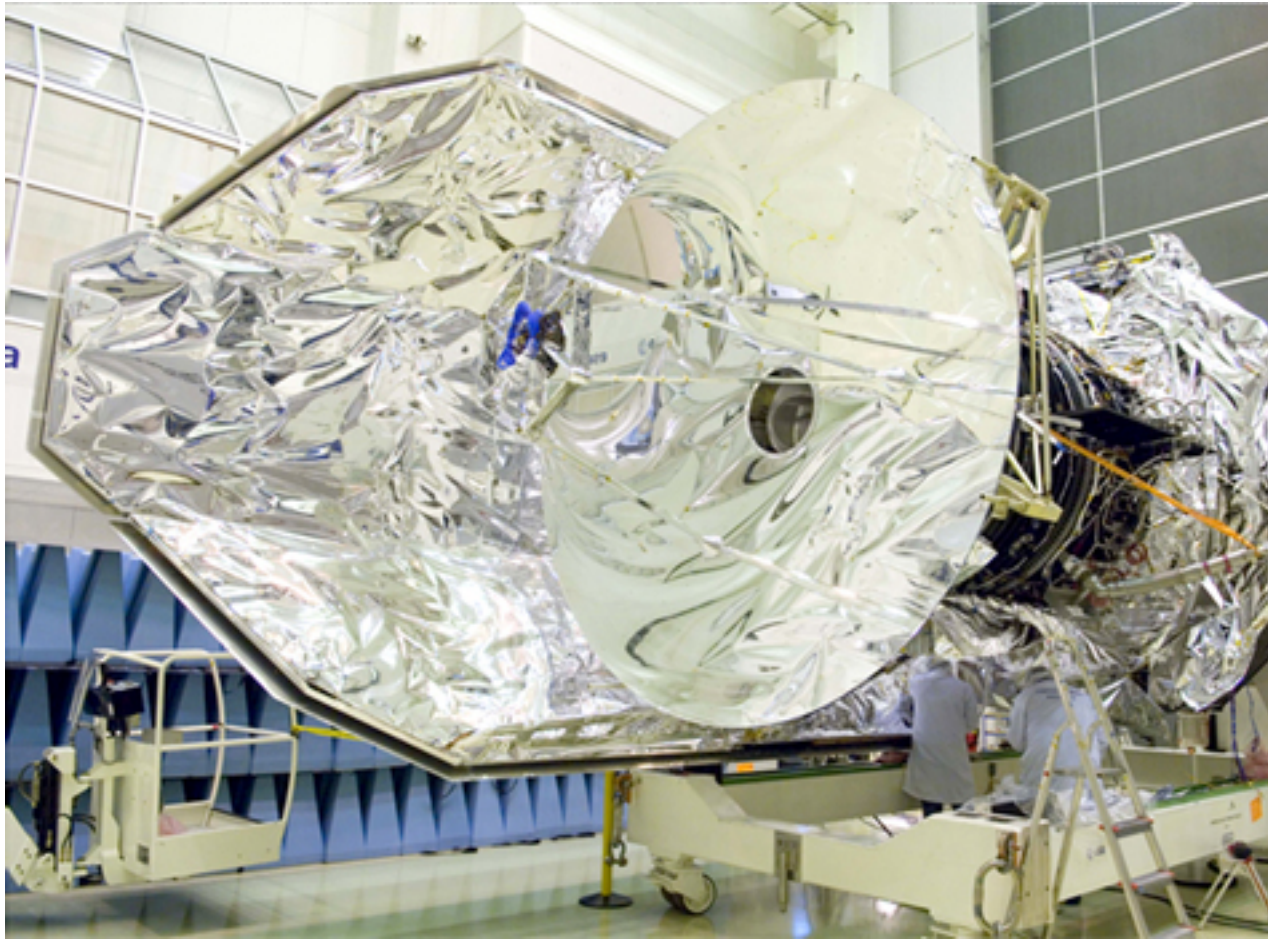


On lui doit, entre autres, la découverte

- (1) de la planète Uranus (13 mars 1781),
- (2) du mouvement du soleil vers ce qu'il nomma l'apex (1783)
- (3) Il dessine un modèle d'univers lenticulaire et semble avoir eu l'intuition des nébuleuses extragalactiques (1785)
- (4) de deux satellites d'Uranus : Titania et Obéron (1787),
- (5) des satellites Mimas et Encelade de Saturne (1789),
- (6) de **la lumière infrarouge** en 1800, un an avant celle de l'ultraviolet [cette découverte démontra l'existence de lumière invisible à notre œil],
- (7) des étoiles binaires (1802),
- (8) de la forme (approximative) de notre Galaxie à partir du comptage d'étoiles (1785).

3. LE TÉLÉSCOPE SPATIAL HERSCHEL

Herschel possède le plus grand miroir construit à ce jour pour l'astronomie spatiale. Le télescope spatial Herschel est composé d'un miroir primaire de 3,5 m de diamètre et d'un miroir secondaire. Herschel, en tant que satellite, mesure 7,5 m de haut pour une section de 4x4 m. Il pèse 3.3 tonnes. Trois instruments sont embarqués à son bord, HIFI, un spectromètre à haute résolution dédié à l'étude de la chimie de l'Univers, PACS, une caméra de bolomètres pour cartographier l'émission infrarouge des grains de poussière et SPIRE, qui remplit les mêmes fonctions que PACS mais à de plus grandes longueurs d'onde, dans l'infrarouge sub-millimétrique. [Les bolomètres comptent parmi les capteurs les plus performants pour le rayonnement X, l'infrarouge lointain et le sub-millimétrique. Ils seront désormais embarqués à bord de satellites d'observation astronomiques, tels Planck. Afin d'accroître leur sensibilité et de réduire leur "bruit" intrinsèque, c'est-à-dire le rayonnement parasite qu'ils émettent, les bolomètres sont le plus souvent refroidis à très basse température.]



Le télescope spatial Herschel a été lancé de Kourou le 14 mai 2009 par une fusée Ariane 5. Herschel est placé en orbite au point L2 de Lagrange à 1 million cinq cent mille kilomètres de la Terre.



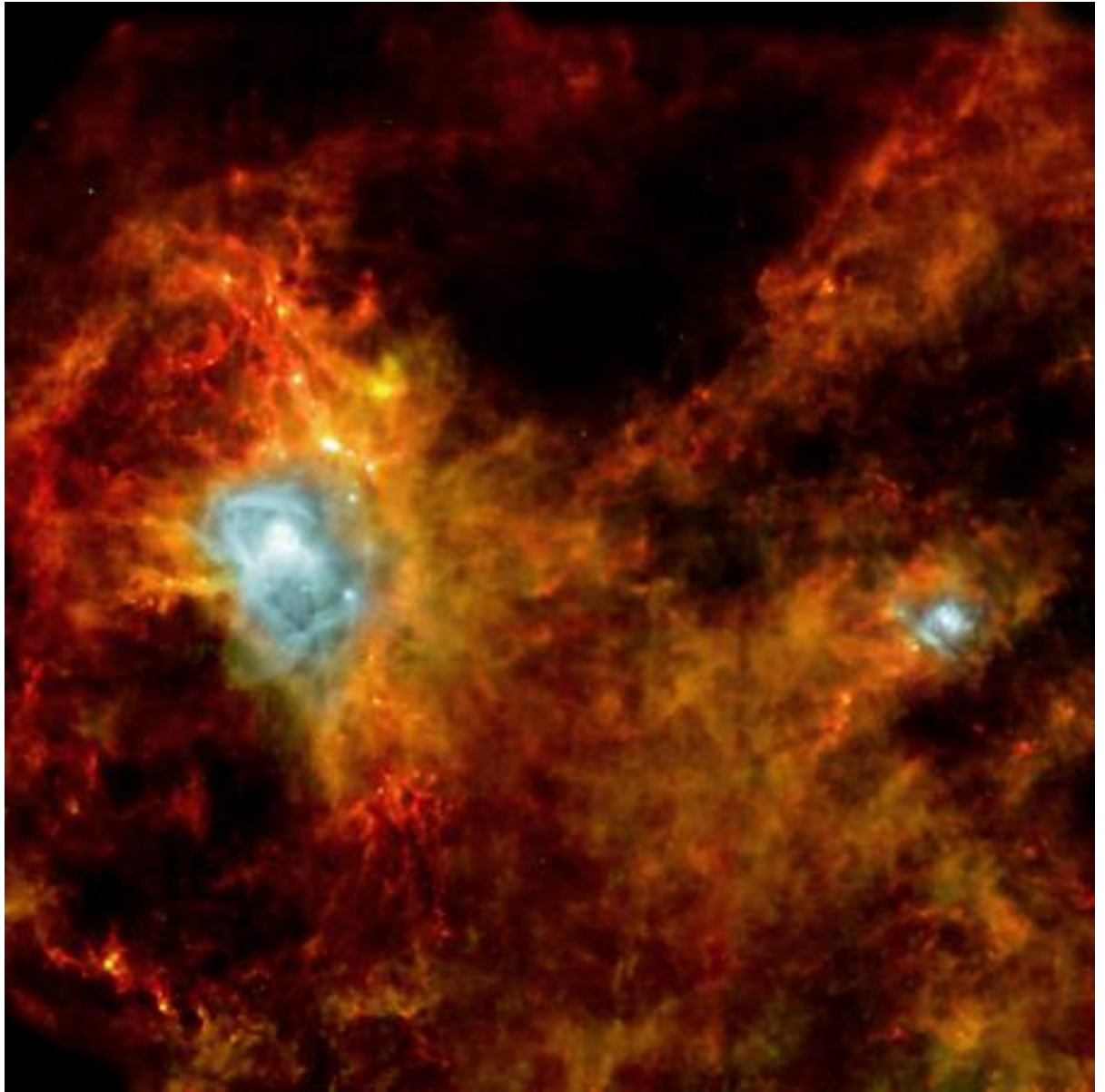


Image dans trois couleurs de l'infrarouge lointain dans la constellation de l'aigle (Aquila).

Les trois filtres utilisés sont ceux à 75, 170 et 500 μm des instruments PACS et SPIRE sur Herschel. L'image est codée en couleurs visibles du bleu au rouge en fonction de l'intensité lumineuse dans ces trois filtres, le bleu correspondant à un maximum d'intensité vers 75 μm et le rouge correspondant à un maximum d'intensité à 500 μm . La taille de l'image est de 3 degrés sur 3 degrés sur le ciel, soit 60 années-lumière à la distance d'Aquila. Les deux bulles bleues sont des régions dans lesquelles des étoiles massives chauffent fortement la poussière. Le bleu indique ainsi du gaz à une température supérieure (-200°C) à celle des zones rougeâtres plus froides (-250°C). De nombreux embryons d'étoiles, des petits points rouges, sont visibles dans les filaments qui entourent la bulle bleue de gauche. Cette bulle est gonflée par le rayonnement ultraviolet d'étoiles géantes. Ce rayonnement est absorbé par les grains de poussières qui sont légèrement réchauffés par ce coup de soleil géant. La poussière très froide (inférieure à -200°C) restitue l'énergie emmagasinée sous la forme de lumière dans l'infrarouge lointain et submillimétrique. Crédit: ESA, PACS & SPIRE consortia.

L'astronomie dans l'infrarouge lointain et submillimétrique est une science encore jeune. En 30 ans, les astronomes infrarougeistes ont dévoilé des dizaines de milliers de nouvelles galaxies, et ont découvert que de la vapeur d'eau était présente dans les nuages gazeux de notre galaxie. D'autres systèmes solaires en cours de formation ou des processus physiques conduisant à la naissance des étoiles et des galaxies sont étudiés dans les meilleures conditions par les télescopes infrarouges dans l'espace, sans les restrictions imposées par l'atmosphère terrestre. C'est pourquoi l'Agence Spatiale Européenne a décidé de construire l'observatoire spatial Herschel. Le CEA avec l'aide du CNES participe à cette aventure en réalisant de l'instrumentation et en proposant d'ambitieux programmes d'observation.

Herschel a ouvert une nouvelle fenêtre d'observation sur l'univers. Il va désormais s'attaquer aux mystères de la **naissance des étoiles et de l'évolution de la vie des galaxies**.

Comment les galaxies se forment-elles et évoluent-elles dans la jeunesse de l'Univers ? Comment les étoiles se forment-elles et évoluent-elles en relation avec le milieu interstellaire des galaxies ? Dans les phases précoces de leur formation et de leur vie, les étoiles et les planètes sont dissimulées à l'intérieur ou derrière des nuages de gaz et de poussière qui sont à l'origine de leur constitution. Les noyaux des galaxies sont aussi masqués par ces nuages de poussière. Observer dans l'infrarouge revient à sonder ces nuages de poussière. Herschel étudiera également la chimie du milieu interstellaire des galaxies, des comètes et du système solaire.



Jean-Luc Starck (Astrophysique, CEA), élève d'Albert Bijaoui, est l'un des pionniers de l'utilisation des représentations creuses en Astronomie et en Astrophysique. Emmanuel Candès, David Donoho et J-L. Starck ont développé et amélioré les algorithmes de **compressed sensing**.

Le compressed sensing permet d'adapter le nombre de mesures à faire à la complexité du signal ou de l'image.

Si tout fonctionne comme prévu, le **compressed sensing** sera utilisé pour transmettre, de la façon la plus économique, les mesures faites par Herschel.

La version du compressed sensing qui a été installée sur Herschel utilise les **noiselets**. J'ai inventé les noiselets, il y a dix ans, pour répondre à une question posée par R. R. Coifman.

Pour faire court, la base orthonormée des noiselets est **la** base la plus **décorrélée** des bases de paquets d'ondelettes.

Si une image a une représentation parcimonieuse dans l'une des bases de paquets d'ondelettes, il suffit pour l'acquérir d'évaluer un petit nombre de ses coefficients dans la base des noiselets. Le nombre de mesures à faire est alors seulement dicté par la parcimonie. On ne fait plus de mesures superflues.

Ces deux assertions seront étayées dans les pages qui suivent.

4. LE COMPRESSED SENSING

Le compressed sensing a pour but d'ajuster le nombre de mesures à effectuer à la complexité du signal ou de l'image que l'on mesure. Comment définir cette complexité? La théorie de la complexité de Kolmogorov définit la complexité d'un objet fini par la taille du plus petit programme informatique (au sens de l'informatique théorique) qui permet de produire cet objet. Dans cet exposé la complexité est définie comme le **nombre de degrés de liberté** ou, plus précisément, par l'existence d'une base orthonormée "classique" B dans la quelle la représentation du signal ou de l'image est "sparse". Cette base B peut être la base de Fourier. Le problème est alors celui de l'échantillonnage optimal d'un signal dont la transformée de Fourier est portée par un petit ensemble. Mais la théorie du compressed sensing s'applique à des bases orthonormées arbitraires B à condition que l'on sache construire une base B^* incohérente à B .

Le paradigme du compressed sensing nous apprend le résultat paradoxal suivant:

Si une image a une représentation parcimonieuse dans une base d'ondelettes, il ne faut surtout pas utiliser cette base d'ondelettes pour acquérir cette image. Voici un pseudo-théorème.

Théorème 4.1. *Soit $F \subset l^2\{1, \dots, N\}$ un ensemble de signaux de longueur N . Supposons que tout signal $f \in F$ admette une représentation parcimonieuse dans une base orthonormée $B \subset \mathbb{R}^N$. Alors l'acquisition optimale de ces signaux $f \in F$ est fournie par les produits scalaires entre f et "quelques" vecteurs de la base B^* qui est la plus incohérente à B .*

Définition 1. *Soit $\beta \geq 1$. Alors deux bases orthonormées $B = \{e_1, \dots, e_N\}$ et $B^* = \{f_1, \dots, f_N\}$ de $l^2\{1, \dots, N\}$ sont β -incohérentes si*

$$\sup_{1 \leq j, k \leq N} | \langle e_j, f_k \rangle | \leq \frac{\beta}{\sqrt{N}} \quad (1)$$

$0 \leq \beta < 1$ est impossible. On a toujours $\beta \leq \sqrt{N}$.

Dans le théorème général qui suit, les bases B et B^* sont β -incohérentes et β est défini par (1) :

Théorème 4.2. *Soit F une collection de signaux ou d'images ayant une représentation q -sparse dans une base orthonormée $B = \{e_1, \dots, e_N\}$ de \mathbb{R}^N . Cela signifie que, pour tout $f \in F$, nous avons*

$$f = \sum_{j \in F} \alpha_j e_j$$

avec $|F| \leq q$. Le support F dépend de f .

Supposons que $0 < \delta < 1$ et que $E \subset \{1, \dots, N\}$ est choisi au hasard avec $|E| = p$ avec $p \geq C_0 \beta^2 q \log(N/\delta)$ et $p \geq C'_0 (\log(N/\delta))^2$. Alors, avec une probabilité écrasante (supérieure à $1 - \delta$), la plupart des signaux $f \in F$ peuvent être reconstruits avec seulement p mesures définies par

$$\langle f, f_j \rangle, \quad j \in E, \quad f_j \in B^*.$$

“Probabilité écrasante” signifie que ce résultat est vrai pour la plupart des ensembles $E \subset \{1, \dots, N\}$ et aussi pour la plupart des suites de signes de $f(k)$, $1 \leq k \leq N$.

5. LES NOISELETS

Voici ce qu'en dit Google: *Noiselets are functions which are noise-like in the sense that they are totally uncompressible by orthogonal wavelet packet methods. We describe a library of such functions and demonstrate a few of their noise-like properties.* On a longtemps cru que les paquets d'ondelettes permettent de capter n'importe quelle structure particulière (pattern) d'un signal. Cela a conduit Coifman à formuler l'hypothèse suivante. *Si un signal $s(t)$ ne peut être comprimé dans aucune base de paquets d'ondelettes, alors ce signal est nécessairement un bruit blanc.* Je lui ai fourni le contre-exemple des noiselets. Voici leur construction. On considère la famille $g_j(x)$, $j \in N$, des fonctions en escalier de la variable $x \in [0, 1]$ définie par récurrence par :

$$g_1(x) = \chi_{[0,1]}(x) \quad (2)$$

$$g_{2n}(x) = (1 - i)g_n(2x) + (1 + i)g_n(2x - 1) \quad (3)$$

$$g_{2n+1}(x) = (1 + i)g_n(2x) + (1 - i)g_n(2x - 1) \quad (4)$$

Si l'on remplace partout $1 \pm i$ par ± 1 , cette construction fournit les fonctions de Walsh.

On observera que $|g_j(x)| = 2^{N/2}$ pour $2^N \leq j < 2^{N+1}$. Désignons par V_N le sous-espace de $L^2([0, 1])$ composé des fonctions en escalier constantes sur chaque intervalle $[k2^{-N}, (k+1)2^{-N})$, $0 \leq k < 2^N$. Alors la collection des 2^N fonctions

$$2^{-\frac{N}{2}} g_j(x), \quad 2^N \leq j < 2^{N+1} \quad (5)$$

est une base orthonormée de V_N . Ces fonctions g_j , $2^N \leq j < 2^{N+1}$, une fois échantillonnées sur la grille

$$\{0, 2^{-N}, \dots, (2^N - 1)2^{-N}\}$$

sont les noiselets recherchées. La décorrélation entre la base des noiselets et les bases de paquets d'ondelettes sera l'objet du théorème 5.1.

Théorème 5.1. *Soit B la base de Haar de $l^2\{1, \dots, N\}$, $N = 2^m$, ou bien n'importe quelle base de paquets d'ondelettes appartenant au système de Haar. Alors la base B^* des noiselets est 1-incohérente à B .*

Cela entraîne le résultat suivant:

Si tous les signaux $f \in F$ ont une représentation parcimonieuse dans la base de Haar, alors on doit utiliser les noiselets pour échantillonner $f \in F$.

La complémentarité des ondelettes et des noiselets implique que les noiselets doivent être utilisées pour échantillonner les images qui ont une représentation parcimonieuse dans une base d'ondelettes.

6. LE PROGRAMME D'EUGENE WIGNER

Le programme de Wigner est issu de ses travaux en mécanique quantique. Ce programme est basé sur la correspondance entre le traitement du signal et la mécanique quantique. Dans cette correspondance, la position devient le temps et le moment devient la fréquence. L'impossibilité de mesurer avec précision la position et la vitesse d'une particule élémentaire résulte du principe d'incertitude de Heisenberg. Cela devient en traitement du signal l'impossibilité de définir une fréquence instantanée, c'est-à-dire de mesurer à la fois le temps et la fréquence. Dans les années trente, Wigner (prix Nobel de physiques) introduisit le *plan temps-fréquence* et la *transformée de Wigner* pour contourner cette obstruction. En mécanique quantique (et en mathématiques) le *plan temps-fréquence* s'appelle *l'espace des phases*. La transformée de Wigner $W(t, \omega)$ d'un signal $f(t)$ est une fonction $W(t, \omega)$ de la variable temporelle t et de la variable fréquentielle ω . Cette fonction nous propose **une** analyse de Fourier instantanée du signal $f(t)$. Plus précisément, à chaque instant t , la fonction $\omega \mapsto W(t, \omega)$ est une candidate pour être **une** transformée de Fourier de $f(t)$ à l'instant t .

La transformée de Fourier instantanée ne peut être définie comme la limite de la transformée de Fourier à fenêtre quand la taille de la fenêtre tend vers 0.

L'obstruction est précisément le principe d'incertitude de Heisenberg. Déployer un signal dans le plan temps-fréquence est aussi difficile que d'écrire la partition en écoutant une symphonie (voir à ce sujet le livre d'Agnès Desolneux et David Mumford). La transformation de Wigner est **une** solution parmi d'autres. Elle résout exactement le problème posé quand on l'applique aux chirps linéaires $f(t) = \exp(i\alpha t^2)$ où α est un paramètre réel.

7. LA TRANSFORMÉE DE WIGNER-VILLE

La transformée de Wigner d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par

$$W(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) f(t + \tau/2) \bar{f}(t - \tau/2) d\tau$$

La généralisation à $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est évidente. En d'autres termes $W(t, \omega)$ est le symbole de Weyl de l'opérateur de projection orthogonale sur la fonction f . Cette observation, due à Hermann Weyl, entraîne la propriété suivante.

Théorème 7.1. *Une famille $\psi_\lambda(x)$, $\lambda \in \Lambda$, est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si les transformées de Wigner $\Psi_\lambda(x, \omega)$ de $\psi_\lambda(x)$ vérifient les deux conditions suivantes :*

(a) *la complétude qui s'écrit*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \Psi_\lambda(x, \omega) = 1 \quad \text{identiquement}$$

(b) *l'orthogonalité qui s'écrit*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \Psi_\lambda \overline{\Psi_{\lambda'}} dx d\omega = 0 \quad \text{si } \lambda \neq \lambda', \quad \lambda, \lambda' \in \Lambda$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\Psi_\lambda(x, \omega)|^2 dx d\omega = (2\pi)^n, \quad \lambda \in \Lambda.$$

8. BASES ORTHONORMÉES ET PAVAGES DU PLAN TEMPS-FRÉQUENCE

Si ces transformées de Wigner $\Psi_\lambda(x, \omega)$ pouvaient être les fonctions indicatrices d'ensembles E_λ du plan temps-fréquence (ou de l'espace des phases), les conditions précédentes impliqueraient que ces ensembles forment une partition du plan temps-fréquence. En outre la mesure de chaque E_λ devrait valoir $(2\pi)^n$. Voici le paradigme de Wigner.

Proposition 8.1. *Réciproquement, soit*

$$B_\lambda = I_\lambda \times J_\lambda, \quad I_\lambda \subset \mathbb{R}^n, \quad J_\lambda \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \Lambda,$$

une partition arbitraire du plan temps-fréquence en des boîtes de Heisenberg. Les I_λ et les J_λ seront des cubes ou des boules. Par hypothèse, le volume de chaque boîte B_λ vaut $(2\pi)^n$. Alors il existe une base orthonormée ψ_λ , $\lambda \in \Lambda$, de $L^2(\mathbb{R}^n)$ qui est adaptée à cette partition. Cela signifie que la transformée de Wigner Ψ_λ de ψ_λ est "presque portée" par B_λ .

"Presque portée" signifie qu'en désignant par h_λ le changement affine de variables dans \mathbb{R}^{2n} qui transforme le cube unité en la boîte de Heisenberg B_λ , les fonctions composées $|\det h_\lambda|^{1/2} \Psi_\lambda \circ h_\lambda$ appartiennent à un ensemble borné de fonctions de la classe de Schwartz. Cette assertion naïve est fautive, mais constitue un excellent programme de recherche.

9. LES LOGONS DE GABOR

Le premier à appliquer ce paradigme fut Dennis Gabor (lauréat du prix Nobel de physiques). En 1945 il voulut décomposer le signal de parole en une combinaison linéaire de ce qu'il appelait des *logons* qui modélisent les *phonèmes* des linguistes (voir à ce propos le livre d'Agnès Desolneux et de David Mumford). Les logons étaient définis par $w_{k,l}(t) = \exp(2\pi ikt)g(t - l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $g(t) = \exp(-t^2/2)$. Aujourd'hui ces *logons* sont appelés des *ondelettes de Gabor*. Les *ondelettes de Gabor* correspondent à une partition du *plan temps-fréquence* en carrés disjoints. Gabor pensait que ses ondelettes formaient une base. Nous savons (Ingrid Daubechies et Kristian Seip) que ce n'est pas le cas et deux constructions (les "wavelet packets" et les bases trigonométriques locales) permettent de réparer cette erreur.

10. LES WAVELET PACKETS POUR LES NULS

Les “wavelet packets” ne sont pas une base orthonormée, mais fournissent, à la demande, toute une famille de bases orthonormées. En fonction des connaissances a priori sur le signal étudié, l'utilisateur choisit une base dans cette famille. Le choix peut être aussi dicté par la parcimonie qui est mesurée à l'aide d'un critère entropique.

Le point de départ de la construction qui suit est le découpage itératif du cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en intervalles dyadiques. On identifie le cercle à $I = [0, 1)$ et la première partition crée les intervalles $I_0 = [0, 1/2)$ et $I_1 = [1/2, 1)$. On itère la dichotomie sur chacun de ces deux intervalles et l'on obtient les intervalles $I_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, etc. Ceci se traduit en une décomposition de $H = L^2(\mathbb{T})$ comme la somme directe orthogonale des deux sous-espaces H_0 et H_1 définis par $f \in H_0$ si et seulement si f est portée par I_0 et $f \in H_1$ si et seulement si f est portée par I_1 . On a donc $H = H_0 \oplus H_1$. De même H_0 peut être décomposé en $H_0 = H_{0,0} \oplus H_{0,1}$. Les fonctions $f \in H_{\alpha,\beta}$ sont portées par $I_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, et ainsi de suite.

Cette décomposition itérative de $L^2(\mathbb{T})$ va maintenant devenir une décomposition de $l^2(\mathbb{Z})$. Pour cela on associe à chaque suite $(c_k) \in l^2(\mathbb{Z})$ la série de Fourier correspondante $f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \exp(2\pi i k \theta)$ qui est définie sur \mathbb{T} . On transporte la décomposition $H = H_0 \oplus H_1$ et celles qui suivent à l'aide de cet isomorphisme entre $L^2(\mathbb{T})$ et $l^2(\mathbb{Z})$. Ces cascades de décompositions de $l^2(\mathbb{Z})$ sont données par une suite d'opérateurs de filtrage utilisant des filtres idéaux.

11. LA VERSION DISCRÈTE DES WAVELET PACKETS

La version discrète des "wavelet packets" utilise les fameux *filtres miroirs en quadrature* découverts par D. Esteban et C. Galand au centre IBM de La Gaude. Il s'agit de remplacer les deux filtres idéaux précédents par deux filtres à réponse impulsionnelle finie F_0 et F_1 . Les deux filtres miroirs en quadrature F_0 et F_1 agissent sur les signaux $\mathbf{x}(k) \in l^2(\mathbb{Z})$ échantillonnés sur les entiers. Les deux opérateurs linéaires continus $F_0 : l^2(\mathbb{Z}) \mapsto l^2(\mathbb{Z})$ et $F_1 : l^2(\mathbb{Z}) \mapsto l^2(\mathbb{Z})$ commutent avec les translations entières. Le filtre F_0 est un filtre passe-bas : il vérifie $F_0(1) = 1$. On sous-échantillonne sur $2\mathbb{Z}$ les sorties $F_0(\mathbf{x})$ et $F_1(\mathbf{x})$ et l'on définit ainsi les opérateurs $T_0(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 \in l^2(2\mathbb{Z})$ et $T_1(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_1 \in l^2(2\mathbb{Z})$. Les fonctions de transfert des filtres F_0 et F_1 sont notés $m_0(\xi)$ et $m_1(\xi)$. On a alors

Lemme 11.1. *L'application $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1)$ est unitaire si et seulement si la matrice $M(\xi)$ définie par*

$$M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_0(\xi + \pi) \\ m_1(\xi) & m_1(\xi + \pi) \end{pmatrix} \quad (6)$$

est unitaire pour presque tout ξ . Si cette condition est réalisée, on a

$$I = T_0^* T_0 + T_1^* T_1 \quad (7)$$

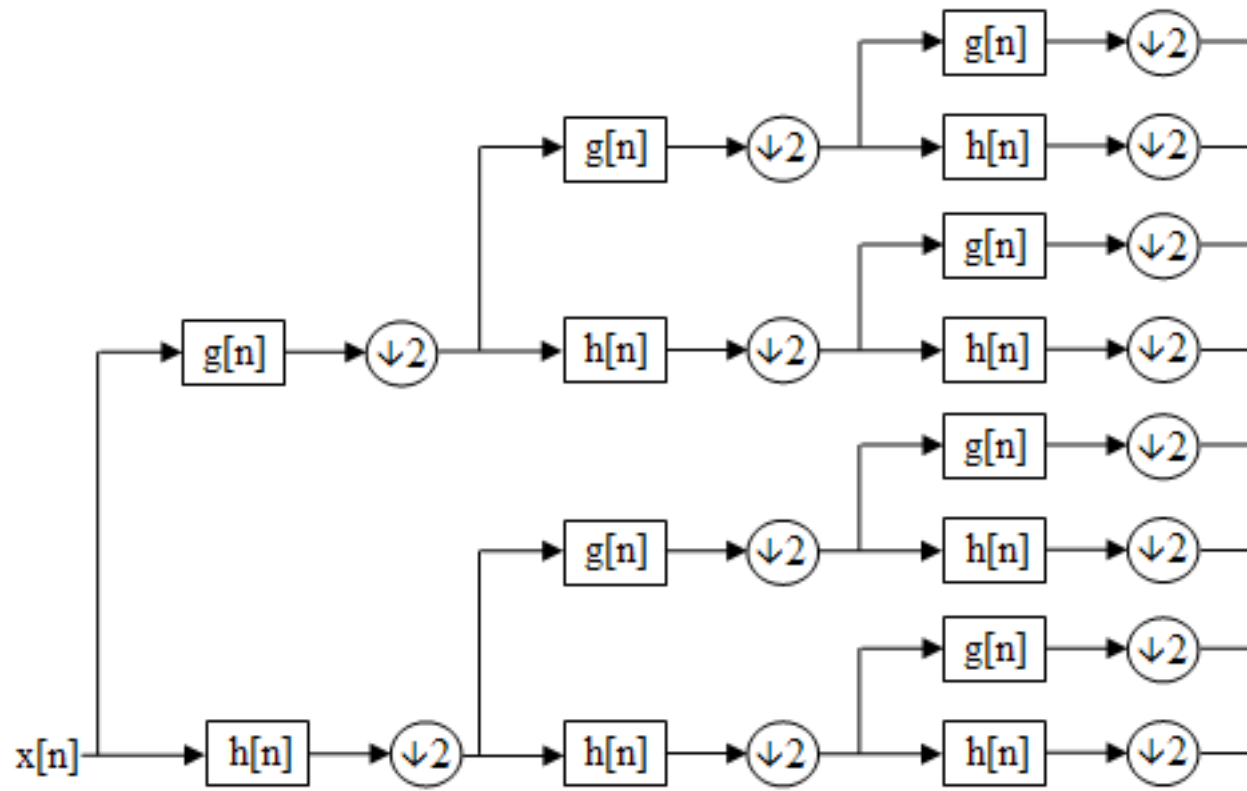
et, pour tout $\mathbf{x} \in l^2(\mathbb{Z})$, les vecteurs $T_0^ T_0(\mathbf{x})$ et $T_1^* T_1(\mathbf{x})$ sont orthogonaux dans $l^2(\mathbb{Z})$.*

On définit alors $H = l^2(\mathbb{Z})$ et $H_0 = T_0^*T_0(H)$, $H_1 = T_1^*T_1(H)$ et l'on a $H = H_0 \oplus H_1$. On obtient ensuite les sous-espaces $H_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, en appliquant de façon itérative le lemme suivant.

Lemme 11.2. *Soit H un espace de Hilbert et $e_k, k \in \mathbb{Z}$, une base orthormée de H . On forme les vecteurs $f_{2k} = \alpha_0 e_{2k} + \dots + \alpha_m e_{2k+m}$ et $g_{2k} = \beta_0 e_{2k} + \dots + \beta_m e_{2k+m}$ où les suites $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ et $(\beta_0, \dots, \beta_m)$ sont les réponses impulsionnelles de F_0 et F_1 . Alors les vecteurs f_{2k} forment une base orthonormée de H_0 , les $g_{2k}, k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de H_1 et l'on a $H = H_0 \oplus H_1$.*

L'analyse par ondelettes est un cas très particulier des constructions qui suivent. L'analyse en ondelettes revient à utiliser un schéma en arête de hareng. Le voici. On ne touche plus à \mathbf{y}_1 et l'on itère le schéma sur \mathbf{y}_0 . Chacune de ces transformations est unitaire. On obtient ainsi la version discrète de l'analyse par ondelettes et l'on a donc une reconstruction exacte. L'analyse par "wavelet packets" consiste à itérer F_0 ou F_1 à l'aide d'un arbre arbitraire (qui n'est pas nécessairement l'arête de hareng). A chaque étape de cette itération on reste libre de choisir F_0 ou F_1 .

Sur Google, taper wavelet packets.



12. LA VERSION CONTINUE DES WAVELET PACKETS

On résout le problème posé par Gabor en utilisant une variante de la base de Walsh. La base de Walsh réduite $W_n(x)$, $n \geq 1$, est une base orthonormée de $L^2[0, 1]$. On pose $W_0(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ et les fonctions W_n sont alors définies, pour $n \geq 1$, par

$$W_{2n}(x) = W_n(2x) + W_n(2x - 1) \quad (8)$$

$$W_{2n+1}(x) = W_n(2x) - W_n(2x - 1) \quad (9)$$

Alors les $W_n(x)$ sont toutes portées par $[0, 1]$ et la suite double $W_n(x - k)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. C'est la base de Walsh complétée.

Nous construisons maintenant une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $w_n(x - k)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, où, cette fois, les w_n sont des fonctions régulières, à supports dans un intervalle fixe $[0, A]$. **Cette suite double $w_n(x - k)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, est la version "paquets d'ondelettes" des logons de Gabor.** Pour construire cette base orthonormée, on suit la même stratégie que pour le système de Walsh. On part de la fonction d'échelle $\varphi(x)$ d'une analyse multirésolution ($\varphi(x)$ remplacera $\chi_{[0,1]}(x)$) et l'on pose $w_0 = \varphi$. Ensuite les w_n sont définies par (1) et (2) à ceci près que l'on utilise les deux filtres miroirs en quadrature F_0 et F_1 au lieu des demi-sommes et demi-différences. Les fonctions w_n sont toutes portées par un intervalle fixe $[0, A]$ et sont régulières. Le degré de régularité dépend de la paire de filtres miroirs en quadrature utilisée.

13. BASES ORTHOGONALES DE PAQUETS D'ONDELETTES

Nous commençons par la dimension 1. A chaque couple (j, n) , $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, on associe l'intervalle dyadique $I(j, n)$ composé des fréquences ξ vérifiant $2^j n \leq \xi < 2^j(n+1)$. On a alors

Théorème 13.1. *Soit E un ensemble, par ailleurs arbitraire, de couples (j, n) tel que la réunion des intervalles correspondants $I(j, n)$ soit une partition de $[0, \infty)$, à un ensemble dénombrable près. Alors les fonctions*

$$2^{j/2} w_n(2^j x - k), \quad n \in \mathbb{N}, j, k \in \mathbb{Z}$$

constituent une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Les intervalles dyadiques $[2^j, 2^{j+1})$ recouvrent exactement $(0, \infty)$. Cela revient à choisir $n = 1$ dans le théorème 9.1 et conduit aux ondelettes usuelles. Mais il y a infiniment plus de choix possibles. L'utilisateur peut régler, en fonction du signal analysé, le banc de filtres qui lui semble le plus approprié (dont les bandes passantes sont les $I(j, n)$). **L'utilisation des paquets d'ondelettes revient donc à effectuer un filtrage adaptatif.**

14. SPOT5



14.1. **Bernard Rougé.** Voici une description, par son concepteur Bernard Rougé, des spécificités du satellite d'observation SPOT5 : *Issu de la famille SPOT, le satellite d'observation optique SPOT5, dont le lancement a eu lieu le 4 mai 2002 (Ariane 42P, Vol 151), permet d'atteindre une résolution de 3 mètres dans la bande spectrale panchromatique. Si le principe d'acquisition demeure basé sur l'utilisation de barrettes CCD au plan focal d'un télescope générant les images ligne par ligne par déplacement du satellite sur son orbite, SPOT5 se démarque cependant de ses prédécesseurs par une adaptation de l'échantillonnage permettant de satisfaire la condition de Shannon par un échantillonnage bidimensionnel correct.*

La grille d'échantillonnage n'est plus la grille usuelle carrée mais une grille quinconce, obtenue par entrelacement de deux images carrées de pas d'échantillonnage 5 mètres, mais décalées de 2,5 mètres en ligne et en colonne. Ce type d'échantillonnage, noté Supermode et obtenu via l'utilisation d'une double barrette dans le plan focal, permet d'accéder à la totalité de l'information fréquentielle non éliminée par le système d'acquisition et génère donc un minimum de repliement de spectre. Les images sont ensuite comprimées à bord puis transmises au sol et décomprimées par seuillage des coefficients de paquets d'ondelettes.

REFERENCES

- [1] J. Bobin, J-L. Starck, and R. Ottensamer, Compressed sensing in Astronomy, IEEE (Selected topics in signal processing), Vol. 2, No. 5, October 2008.
- [2] R. Coifman, F. Geshwind, and Y. Meyer, Noiselets, Applied and Computational Harmonic Analysis, 10 (2001), pp. 2744.
- [3] E. Candes and J. Romberg, Sparsity and incoherence in compressive sampling, Applied and Computational Harmonic Analysis, 23 (2007), pp. 969-985.
- [4] H. Nickisch and M. Steeger, Bayesian experimental design for compressed sensing (2008).